ENAC

P. L. 1981

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée 4 heures ; Coef 7

Cette épreuve comporte 4 problèmes indépendants.

Le candidat doit traiter 3 problèmes, et 3 seulement, parmi les 4 proposés. Il doit indiquer clairement son choix en tête de la copie. Ne sera corrigée que la rédaction correspondant à ce choix. Chacun des 4 problèmes est noté sur le même nombre de points.

PROBLEME 1

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n, U une base de E.

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice A dans la base U est telle que le coefficient de la i^e ligne et de la j^e colonne soit $a_{i,j} = \cos (i + j - 2)\,\theta$, où θ est un réel donné. On note C_j la j^e colonne de la matrice A.

1. Montrer que trois colonnes successives quelconques de A sont toujours liées. (On pourra calculer la somme $C_j + C_{j+2}$).

2. Est-il vrai de dire que si trois colonnes successives quelconques d'une matrice M donnée sont liées, la matrice est de rang strictement inférieur à 3 ? Justifier votre réponse.

3. Déterminer le rang de la matrice A.
   On suppose dans la suite le nombre θ strictement compris entre 0 et π.

4. Quelle est la dimension du noyau de f ? En préciser une base (on pourra utiliser les relations trouvées au 1.)

5. Soit $\vec{x}$ un vecteur inconnu de E, de composantes $x_1, x_2, \ldots x_n$ dans la base U ; et $\vec{b}$ un vecteur donné, de composantes $b_1, b_2, \ldots b_n$.

   On note X et B respectivement les colonnes des composantes de $\vec{x}$ et $\vec{b}$.

   A quelles conditions nécessaires et suffisantes le système linéaire d'écriture matricielle $A \cdot X = B$ admet-il des solutions ? On exprimera ces conditions sous la forme de relations aussi simples que possible liant les coefficients b_k et l'angle θ.

6. On choisit $b_k = \cos (k + n - 1)\,\theta$ quel que soit k compris entre 1 et n.

   Le système $AX = B$ admet-il des solutions ? En donner une, telle que $x_j = 0$ pour tout j inférieur à $n - 1$ (On pourra utiliser le 1.)

   Comment en déduire toutes les autres ?

7. On choisit maintenant $b_k = \sin (k + n - 1)\,\theta$ pour tout k compris entre 1 et n. Résoudre et discuter le système $A \cdot X = B$. On précisera la solution telle que $x_j = 0$ pour tout j supérieur à 2.

PROBLEME 2

La notation Log x désigne le logarithme népérien.

1. Déterminer toutes les fonctions numériques continûment dérivables sur l'intervalle ouvert $]0, \frac{\pi}{2}[$, qui sont solutions de l'équation différentielle (E) : $y' \sin 2x - 2y = \sin 2x$.

2. Montrer qu'il existe une de ces fonctions qui admet une limite finie quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$. Quelle est cette limite ?

3. En déduire que l'équation différentielle (E) admet une seule solution continûment dérivable sur l'intervalle ouvert $]0, \pi[$, et que cette fonction est prolongeable par continuité sur le segment $[0, \pi]$. On appelle f(x) la fonction ainsi prolongée. Préciser les valeurs de f en $0, \frac{\pi}{2}$ et π, et la valeur de $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

4. On pose $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot u(x)$. Etudier les variations de u(x), en déduire l'étude du signe de f'(x) sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$. On placera le zéro de f' par rapport à $\frac{\pi}{6}$; on ne cherchera pas à en calculer une valeur plus précise.

5. En déduire l'étude des variations de f(x), et en construire une représentation graphique aussi précise que possible, compte tenu des résultats obtenus. On ne cherchera pas de valeur approchée du minimum de f.

6. On pose, pour tout x compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, $F(x) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{x} f(t)\,dt$.

   Etudier les variations de la fonction F(x). A-t-elle une limite quand x tend vers 0 ? et quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$?

7. Soit α un nombre compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Exprimer la quantité : $F(\alpha) + F\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ au moyen de $\text{Log}(\sin \alpha) \cdot \text{Log}(\cos \alpha)$ et en déduire la limite de la première quantité quand α tend vers 0.

PROBLEME 3

Dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé direct on se propose de construire la courbe C définie en coordonnées polaires par l'équation $\rho = f(\theta) = \dfrac{\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta}{1 - \sin\theta}$, où ρ et θ représentent une détermination du rayon vecteur et de l'angle polaire d'un point M qui décrit C.

1. On fera varier θ entre 0 et 2π. Est-ce suffisant pour obtenir toute la courbe C ?

2. Etudier alors les zéros et le signe de la fonction f. En déduire les tangentes à C au point O, origine du repère. On ne cherchera pas à étudier les variations de f.

3. Montrer que C admet une asymptote, et préciser la position de la courbe par rapport à cette asymptote lorsque le point M s'éloigne à l'infini. On reportera les conclusions de cette étude sur un schéma auxiliaire.

4. Montrer que la courbe C admet un point double autre que l'origine ; déterminer les coordonnées polaires et cartésiennes de ce point, et préciser les tangentes aux deux branches de la courbe C qui passent en ce point.

5. Etudier le signe de $f(\theta) + f(\theta + \pi)$. Quels renseignements en déduit-on pour le tracé de la courbe ?

6. Effectuer un tracé aussi précis que possible de la courbe, compte tenu des éléments qu'on sera parvenu à déterminer.

PROBLEME 4

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que pour tout couple de réels x_1, x_2, on ait : $|f(x_1) - f(x_2)| \geqslant |x_1 - x_2|$.

1. Montrer que f est injective.

2. Montrer que f est strictement monotone.
   En choisissant trois points x_1, x_2, x_3 dans cet ordre, montrer que $f(x_2) - f(x_1)$ et $f(x_3) - f(x_2)$ ne peuvent être de signes différents.

3. Montrer que f est non bornée et bijective.

4. On suppose dans ce paragraphe qu'il existe un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ dont l'image par f est incluse dans $[a,b]$.

   4.1. Montrer qu'il existe un point de $[a,b]$, soit c, tel que $f(c) = c$.

   4.2. On suppose f croissante. Peut-on avoir $f(a) > a$? ou $f(b) < b$?
   Déterminer la restriction de la fonction f à $[a,b]$.

   4.3. On suppose f décroissante. Déterminer sa restriction à $[a,b]$.
   On pourra poser $g(x) = a + b - f(x)$.

5. On suppose désormais f croissante.

   5.1. Montrer que si pour tout x réel on a $f(x) < x$, la courbe Γ qui représente graphiquement la fonction f par rapport à un repère orthonormé direct d'axes Ox, Oy admet quand x tend vers l'infini (par valeurs positives) une asymptote parallèle à la droite d'équation $y = x$.

   5.2. Que dire de la courbe Γ si pour tout x réel on a $x < f(x)$?

   5.3. Soit U l'ensemble des points x de $\mathbb{R}$ tels que $f(x) = x$.
   Montrer que si U est vide, on se trouve dans le cas 5.1. ou 5.2.
   Montrer que si U est non vide et borné, U est réduit soit à un point, soit à un segment.

Quelle peut être la nature de U s'il est non borné ?

5.4. On suppose U non vide.

On considère la suite définie par récurrence, à partir de x_0 donné, par $x_n = f^{-1}(x_{n-1})$. Montrer que cette suite est soit constante, soit convergente vers un point qui appartient à la frontière de U. On pourra prendre un point c de U et étudier la suite $x_n - c$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail